

ÉQUATIONS DE CHAMP MOYEN POUR LES RÉSEAUX DE NEURONES À DEUX POPULATIONS

Olivier MOYNOT^{1,2}, Emmanuel DAUCE², Olivier PINAUD³

¹ Laboratoire de Statistiques et de Probabilités, Université Paul Sabatier (Toulouse 3)

² ONERA-CERT (DTIM), 2 avenue E. Belin, 31055 Toulouse cedex

³ SUPAERO, 10 avenue Edouard Belin, 31055 Toulouse cedex

Mel : {dauce, moynot}@cert.fr ; Olivier.Pinaud@supaero.fr

Résumé

Le cerveau, composé d'un grand nombre de neurones interconnectés, peut être vu comme un système dynamique extrêmement riche. Dans cet article, on s'intéresse à un système dynamique artificiel qui modélise le cerveau de manière très simplifiée. Plus précisément, on considère un réseau de neurones aléatoire, totalement interconnecté, comprenant deux populations de neurones, à savoir des inhibiteurs et des excitateurs. L'objectif est d'étudier ici plus particulièrement le comportement des réseaux de grande taille. Le problème est le suivant : au-delà de quelques milliers de neurones, il n'est plus possible d'utiliser l'informatique pour simuler numériquement l'évolution du système. Le résultat central de cet article est qu'un petit nombre d'équations, dites de champ moyen, suffit pour appréhender le comportement dynamique de ces grands réseaux de neurones. On peut ainsi montrer mathématiquement que quand la taille du réseau se rapproche de l'infini, les neurones tendent à se comporter de manière indépendante - c'est la propagation du chaos - et à suivre une loi gaussienne, identique pour les membres d'une même population. Les caractéristiques de ces deux lois limites (une pour chaque population) sont contenues dans les équations de champ moyen, qui constituent un petit système dynamique, indépendant de la taille du réseau. L'étude numérique de ce petit système dynamique permet par la suite de mettre en évidence des comportements qui n'apparaissent pas dans les réseaux du même type ne contenant qu'une seule population de neurones : pour certaines valeurs des paramètres, la moyenne de chacune des deux lois limites oscille périodiquement dans le temps. Ceci peut être directement rattaché à des phénomènes de synchronisation, dont l'importance en biologie a été mise en évidence à de multiples reprises.

1. Introduction

L'étude asymptotique des grands réseaux de neurones aléatoires et leur lien avec les systèmes de particules et en particulier les verres de spin a mobilisé un nombre important de biologistes, physiciens, informaticiens et mathématiciens ces dernières années. Amari (Amari, 1972) est parmi les premiers à s'intéresser au problème et s'inspire des principes de la mécanique statistique pour formuler ce qu'il appelle l'*hypothèse du chaos local* : lorsqu'un réseau est de grande taille (en pratique, l'approximation est valide à partir de quelques centaines de neurones), on peut considérer que les neurones se comportent de manière indépendante entre eux et que leurs états sont indépendants des poids des connexions (intuitivement, cela signifie que chaque neurone subit l'influence d'un tellement grand nombre d'autres neurones que sa corrélation avec chacun d'entre eux et avec les poids synaptiques est très faible).

Une conséquence immédiate de cette hypothèse du chaos local et du théorème central limite est que la loi du potentiel d'activation de chaque neurone (moyennée sur les poids des connexions synaptiques) tend vers une loi gaussienne, dont les caractéristiques sont données par les *équations de champ moyen*. Alors que l'hypothèse du chaos local n'a fait l'objet d'aucune démonstration rigoureuse, le caractère gaussien des potentiels d'activation a été établi dans certains cas particuliers par Geman, (Geman, 1982 ; Geman et Hwang, 1982) et par Sompolinsky et son équipe (Sompolinsky *et al.*, 1988 ; Crisanti et Sompolinsky, 1987). Par la suite, Cessac, Doyon, Quoy et Samuelides (Cessac *et al.*, 1994) ont eux aussi apporté

leur contribution à ce domaine en s'intéressant à un problème à temps discret pour un réseau à une population de neurones dont notre modèle s'inspire directement.

Si l'on souhaite étendre la portée de ces modèles en se rapprochant des données de la biologie, une voie prometteuse consiste à étudier des réseaux comprenant deux populations de neurones. En effet, la présence de neurones fonctionnellement différenciés est un fait biologique. De plus en plus de neurobiologistes s'intéressent au rôle respectif des neurones excitateurs et inhibiteurs dans les processus de synchronisation, déterminants pour le codage de l'information olfactive (MacLeod et Laurent, 1996) ou visuelle (Gray *et al.*, 1989), ainsi que dans les processus de mémorisation (Buzsaki *et al.*, 1994). Selon une approche plus physicienne, le rôle des inhibiteurs pour la génération de rythmes est étudié par Hansel (Hansel et Sompolinsky, 1996). Enfin, des études sur l'EEG humain suggèrent qu'une régularité rythmique n'a pas le même sens lorsqu'elle concerne la dynamique globale de l'encéphale, auquel cas elle est pathologique (Martinerie *et al.*, 1998).

Notre étude se situe dans la continuité de ces travaux : on s'intéresse à un réseau contenant deux populations de neurones, pour lequel on donne dans un premier temps les équations de champ moyen et un résultat de propagation du chaos. Ces énoncés ont fait l'objet de démonstrations complètes qui font appel à des techniques mathématiques introduites par Ben Arous et Guionnet (Ben Arous et Guionnet, 1995 ; Guionnet, 1997). Elles ne sont pas données dans cet article dont l'objectif est de présenter les résultats obtenus de la

manière la plus claire et la moins technique possible. L'intégralité de la preuve se trouve dans (Daucé et al., 1999). Dans un deuxième temps, nous étudions numériquement le comportement dynamique de ces équations de champ moyen, ce qui permet de mettre en évidence certaines caractéristiques de nos réseaux qui peuvent être rapprochées de phénomènes observés par les biologistes comme la synchronisation.

2. Notions élémentaires de probabilités

Nous avons cherché dans cet article à restreindre au maximum le nombre d'équations utilisées. Toutefois, certains termes employés peuvent encore demeurer obscurs pour les non-spécialistes : voici donc quelques précisions utiles avant de s'intéresser aux résultats mathématiques proprement dits.

Soit une urne dans laquelle se trouvent trois boules, numérotées 1, 2 et 3. On en prend une au hasard. Soit n le numéro de la boule tirée. n est une *variable aléatoire*. Dans ce cas, n peut prendre trois valeurs : 1, 2 ou 3. Si maintenant on prend une boule au hasard, on note son numéro n , on la remet dans l'urne, puis on retire au hasard une nouvelle boule, dont on note le numéro m . Le numéro de la seconde boule ne dépend pas de celui de la première. m et n constituent deux *variables aléatoires indépendantes*.

Si on se donne une variable aléatoire n , sa loi donne les probabilités d'apparition des différents événements possibles : dans le cas des boules tirées au hasard, la loi de n donne une probabilité égale à un tiers pour chacune des valeurs 1, 2 et 3. La *moyenne* de n vaut ici 2, et sa *variance*, qui mesure en moyenne le carré de son écart à sa moyenne, est égale à $[(1-2)^2 + (2-2)^2 + (3-2)^2]/3 = 2/3$.

Dans cet article, on manipulera plus particulièrement des *lois gaussiennes*. Ce sont des lois particulières, très courantes, entièrement caractérisées par leur moyenne et leur variance. On les retrouve fréquemment comme lois limites de grands systèmes aléatoires. Plus précisément, une variable aléatoire réelle X suit une loi gaussienne de moyenne μ et de variance σ si pour tout nombre réel a , on a :

$$P(X \leq a) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^a \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) dx$$

3. Présentation du modèle

On s'intéresse en général à un réseau de neurones totalement interconnecté comprenant deux populations de neurones. Soit N le nombre total de neurones, n^1 le nombre de neurones appartenant à la première population (constituée par exemple de neurones excitateurs), et $n^2 = N - n^1$ le nombre de neurones appartenant à la seconde population (composée par exemple d'inhibiteurs). On suppose que les proportions respectives des deux populations demeurent inchangées lorsque la taille du réseau tend vers l'infini, et qu'elles sont non nulles, c'est-à-dire qu'elles sont toutes deux significativement représentées.

À taille finie, on considère que les neurones de chacune des deux populations évoluent à temps discret suivant la dynamique :

Pour $1 \leq t \leq T$ et p valant 1 ou 2, on a :

$$x_i^p(t) = f\left(\sum_{j=1}^{n^1} J_{ij}^{p1} x_j^1(t-1) + \sum_{j=1}^{n^2} J_{ij}^{p2} x_j^2(t-1) + \sigma W_i^p(t) - \theta_i^p\right)$$

On donne maintenant quelques précisions sur les différentes grandeurs intervenant dans ces équations : l'exposant p représente chaque population ($p=1$ correspond aux excitateurs, $p=2$ aux inhibiteurs). Par ailleurs, $x_i^p(t)$ représente l'état d'activation du $i^{\text{ème}}$ neurone de la population p à l'instant t . C'est un réel compris entre 0 et 1, dont la valeur correspond à la fréquence de décharge des potentiels d'action du neurone. Si $x_i^p(t)$ est proche de 0, le neurone est inerte ; il est très actif si cette grandeur est voisine de 1. Les $x_i^p(0)$ sont toutes choisies indépendantes et de même loi μ_0 .

Les J_{ij}^{pq} représentent les poids des connexions synaptiques entre les neurones des populations p et q . Le terme $J_{ij}^{pq} x_j^q(t)$ correspond à l'influence du $j^{\text{ème}}$ neurone de la population q sur le $i^{\text{ème}}$ neurone de la population p . Les J_{ij}^{pq} sont des variables aléatoires

gaussiennes de moyenne \bar{J}^{pq}/n_q et de variance $(J^{pq})^2/n_q$. À noter que comme les distributions sont gaussiennes, le caractère excitateur ou inhibiteur des neurones est purement statistique. Par exemple, un neurone excitateur est un neurone dont la moyenne des poids de sortie est positive. C'est ainsi que le caractère inhibiteur ou excitateur d'une population correspond plus à une réalité globale qu'à une propriété systématique des neurones qui la composent.

Les θ_i^p représentent les seuils. Mathématiquement, ce sont des variables aléatoires gaussiennes, de moyenne $\bar{\theta}^p$, de variance $(\sigma_{\theta}^p)^2$. Les $W_i^p(t)$ représentent un bruit synaptique. Ce sont des variables aléatoires gaussiennes de moyenne nulle et de variance 1. Les $W_i^p(t)$, J_{ij}^{pq} et les θ_i^p sont des variables aléatoires indépendantes. f est une fonction strictement croissante, bijective à valeurs dans $]0,1[$ — par exemple, $f(x) = 1/2 * (1 + \tanh(x))$.

Pour des raisons techniques (le résultat semble numériquement correct sous ces hypothèses), on suppose que $\sigma > 0$. Ceci signifie qu'on ne peut pas se passer de la présence du bruit dans la démonstration. Une étape centrale de la preuve est en effet de comparer la loi de l'ensemble des états d'activation des neurones à celle du bruit global présent dans le réseau. Ce dernier ne peut donc être nul. Toutefois, attendu qu'il peut être aussi petit que l'on veut, il est raisonnable d'estimer que les résultats qui suivent peuvent être étendus dans le cas sans bruit.

4. Avancées mathématiques

Dans cette section, on donne les deux principaux résultats mathématiques obtenus, ainsi que quelques brèves idées sur la preuve.

4.1 Convergence et propagation du chaos

La loi de l'état d'activation x_i^p de chaque neurone tend vers une loi Q^p quand la taille du réseau tend vers l'infini. Les caractéristiques de cette loi limite sont contenues dans les équations de champ moyen qui sont données au paragraphe suivant.

De plus, on a un résultat de propagation du chaos : les états d'activation de deux neurones distincts, choisis initialement indépendants à $t = 0$, tendent, quand N tend vers l'infini, à rester indépendants pour $t > 0$. Ceci signifie qu'en moyenne, l'influence d'un neurone particulier sur un autre devient négligeable devant celle de l'ensemble des autres neurones de notre grand réseau.

Il faut bien comprendre le sens de ce résultat. Il ne s'agit pas ici d'une absence de corrélation temporelle des deux neurones au sein d'un même réseau fixé. On verra en effet par la suite que les deux neurones peuvent être synchronisés. L'indépendance dont il est question est celle des deux variables aléatoires que sont les états d'activation des deux neurones auxquels on s'intéresse. Autrement dit, si on considère un grand nombre de réseaux (avec pour chacun d'entre eux des poids synaptiques, des seuils et un bruit tirés au hasard suivant les lois de ces différentes grandeurs), le comportement moyen (la moyenne est effectuée sur tous les réseaux et non dans le temps) du premier neurone est indépendant de celui du second.

4.2 Les équations de champ moyen

On note $u_i^p(t)$ le potentiel d'activation du $i^{\text{ème}}$ neurone de la population p à l'instant t . Plus précisément, on a $x_i^p(t) = f(u_i^p(t))$. Le théorème précédent impose les convergences en loi respectives de x_i^p et u_i^p vers x^p et u^p , avec x^p de loi Q^p . Si on note $m^p(t)$ et $q^p(t)$ la moyenne et le moment d'ordre deux de $x^p(t)$ et $\mu^p(t)$ et $v^p(t)$ la moyenne et la variance de $u^p(t)$, il vient :

Les variables u^1 et u^2 suivent des lois gaussiennes (dont les images par f sont Q^1 et Q^2) qui sont caractérisées par leur moyenne μ^p et leur variance v^p . Soit p , un entier tel que $p=1$ ou $p=2$.

On a alors, pour $1 \leq t \leq T$:

$$\begin{aligned} \mu^p(t) &= -\bar{\theta}^p + \bar{J}^{p1} m^1(t-1) + \bar{J}^{p2} m^2(t-1) \\ v^p(t) &= (\sigma^p)^2 + (\sigma_0^p)^2 + (J^{p1})^2 q^1(t-1) + (J^{p2})^2 q^2(t-1) \\ m^p(t) &= \int f(\sqrt{v^p(t)}h + \mu^p(t)) Dh \\ q^p(t) &= \int f^2(\sqrt{v^p(t)}h + \mu^p(t)) Dh \end{aligned}$$

Avec :

$$Dh = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-h^2/2) dh \quad m^p(0) = \int x_0 d\mu_0 \quad q^p(0) = \int (x_0)^2 d\mu_0$$

On obtient ainsi de précieux renseignements sur le comportement statistique des neurones à la limite thermodynamique (c'est-à-dire à taille infinie). En temps que processus limite, les équations de champ moyen donnent ainsi une excellente approximation du comportement des grands réseaux de taille finie. Tout se passe comme si l'information contenue dans le réseau pouvait être concentrée en un petit nombre d'équations ne dépendant pas de sa taille. En pratique, des simulations montrent que les équations de champ moyen décrivent très bien la loi du système si on considère un réseau comprenant 200 neurones pour chaque population.

4.3 Quelques idées sur la preuve

L'objectif n'est pas ici de se lancer dans une démonstration exhaustive, qui est à la fois trop longue et trop technique. Il est toutefois intéressant de dégager quelques notions importantes et de les mettre en valeur. Ceci renseigne notamment sur les difficultés d'extension du résultat à d'autres cas plus généraux.

On utilise dans cette démonstration des idées de grandes déviations, qui entretiennent des rapports étroits mais pas toujours très clairs avec les techniques de champ moyen dynamique des physiciens et la méthode du col. Il est intéressant de noter que le principe de grandes déviations que l'on démontre donne des résultats sur la mesure empirique, c'est-à-dire sur la loi moyenne de tous les neurones du réseau. Pour revenir ensuite aux neurones individuels, et obtenir la loi limite de chacun d'entre eux et donc les équations de champ moyen, on utilise le fait que tous les neurones d'une même population ont une même loi. Une conséquence importante est que nos résultats supposent notamment une grande homogénéité statistique des poids synaptiques du réseau. Ils sont donc difficilement extensibles à des réseaux ne présentant pas ces caractéristiques, et notamment aux réseaux présentant une géométrie complexe qui différencierait trop le rôle des neurones individuels.

Par ailleurs, il est intéressant de noter que la preuve utilise de manière significative le caractère gaussien des poids synaptiques. Or des simulations numériques et des arguments reposant sur l'hypothèse du chaos local donnent à penser que les résultats sont vrais pour des poids non gaussiens, et en particulier pour des réseaux dilués non totalement interconnectés et plus proches de la réalité biologique. D'autres techniques de démonstration semblent toutefois nécessaires pour parvenir à ce résultat. Notons à ce titre que les simulations permettent de dire que le caractère gaussien de la loi limite décrite par les équations de champ moyen est indépendant de la loi des connexions synaptiques : ce n'est pas parce que les poids ne sont plus gaussiens que la loi limite cesse de l'être. Cette robustesse du caractère gaussien de la loi limite, assez naturel d'un point de vue mathématique, semble intéressante à signaler.

5. Etude des équations de champ moyen

Comme on l'a vu dans la partie précédente, les équations de champ moyen constituent un outil

extrêmement puissant pour appréhender le comportement des réseaux comportant un grand nombre de neurones. En effet, au-delà d'une certaine taille, il est impossible d'avoir accès numériquement à la dynamique des grands réseaux de neurones, alors que les équations de champ moyen, qui ne dépendent pas de la taille du réseau, peuvent être étudiées en détail : c'est l'objet de cette section.

Il faut ici noter que malgré sa petite dimension, le système des équations de champ moyen n'est pas facile à étudier mathématiquement. C'est pourquoi tous les résultats de cette partie reposent sur une étude numérique et non sur des démonstrations. Le progrès accompli est néanmoins important : le degré de certitude scientifique contenu dans la résolution numérique de ces équations est bien supérieur à celui de l'étude des réseaux de taille finie, qui au-delà d'une certaine taille ne donne pas d'autre outil que l'extrapolation pour appréhender les caractéristiques du système.

Concrètement, les équations de champ moyen donnent un processus itératif, que nous avons implanté sur machine afin d'accéder à la dynamique stationnaire du processus. C'est bien sûr l'évolution du système dans le temps qui nous intéresse ici. Etant donné le nombre impressionnant de paramètres en jeu, nous avons choisi d'étudier une architecture particulière (voir figure 1) dans le but de décrire un réseau à deux populations dont l'une est à influence excitatrice et l'autre à influence inhibitrice. Ici, il n'y a pas d'inhibition sur l'inhibition.

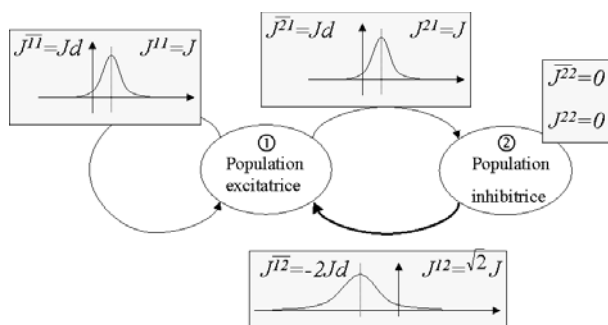


Figure 1 — Architecture d'un réseau à deux populations.

Dans l'étude qui suit, deux paramètres contrôlent les poids du réseau : J est l'écart-type de référence et d est un paramètre qui règle la distance à zéro des deux distributions. Plus d est grand, plus le caractère excitateur ou inhibiteur des deux populations est marqué. On a alors $\bar{J}^{11} = Jd$, $J^{11} = J$, $\bar{J}^{12} = -2Jd$, $J^{12} = \sqrt{2} J$, $\bar{J}^{21} = Jd$, $J^{21} = J$, $\bar{J}^{22} = 0$, $J^{22} = 0$. Ceci permet de réduire sensiblement le nombre de paramètres.

On peut alors distinguer deux types de comportements en fonction du régime stationnaire atteint par la moyenne $\mu^p(t)$ dans les équations de champ moyen :

Si cette moyenne converge vers un point fixe, on retrouve le comportement obtenu systématiquement pour le même type de réseaux avec une seule population de neurones. Les neurones évoluent

aléatoirement autour de cette moyenne fixe : il n'y a pas synchronisation.

Si, en revanche, cette moyenne tend à osciller de manière périodique ou pseudopériodique (on n'a pas d'autres types de comportement avec ce choix de paramètres), alors cela signifie que les neurones d'une population donnée ont tendance à être actifs simultanément. On a donc synchronisation au sens défini par Hansel (Hansel et Sompolsky, 1996).

L'intérêt d'un tel système est qu'il tend à générer des dynamiques présentant une résonance interne forte liée à la frustration issue de la confrontation entre influence excitatrice et influence inhibitrice. Les neurones excitateurs sont synchronisés par l'action des neurones inhibiteurs. Cette résonance se traduit par un comportement périodique dans les équations de champ moyen.

Ce comportement est illustré par la figure 2. La période du signal dynamique est donnée par les niveaux de gris. Le blanc correspond à un point fixe. Les niveaux de gris décrivent des périodes comprises entre 4 et 5,3. Il apparaît sur cette figure qu'une valeur de $\bar{\theta}^2$ positive (ici $\bar{\theta}^2 > 0.2$), qui modère l'influence inhibitrice, est nécessaire pour déclencher un comportement périodique de type accrochage de fréquence (Dans le cas où $\bar{\theta}^2 < 0.2$, l'influence des inhibiteurs est trop forte et éteint la dynamique : on aboutit à un point fixe en 0). Une valeur de σ_θ^2 non nulle permet d'accéder à des dynamiques de type cycle limite, et à augmenter la valeur de la période. Pour générer des rythmes, on doit avoir $\sigma_\theta^2 < \bar{\theta}^2$.

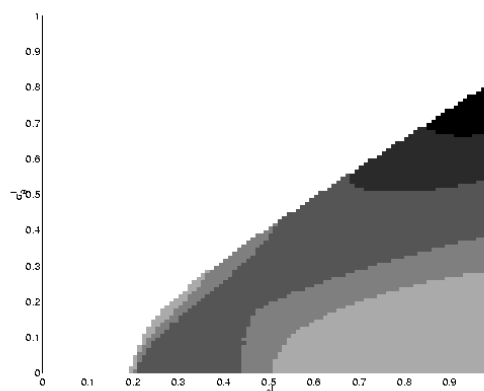


Figure 2 — Comportement périodique des réseaux à deux populations, en fonction de $\bar{\theta}^2$ et σ_θ^2 .

Paramètres : $J = 8$, $d = 3$, $\bar{\theta}^1 = 0$, $\sigma_\theta^1 = 0$.

D'autre part, on peut utiliser la méthode mise en place par Derrida et Pomeau (Pomeau et Derrida, 1986) pour étudier la distance quadratique moyenne entre deux trajectoires : on considère deux réseaux de neurones aléatoires avec des conditions initiales proches mais différentes. On s'intéresse ensuite à l'évolution de la distance quadratique moyenne entre les deux réseaux : si elle demeure inférieure à un certain seuil, le système

est stable. Si cette distance s'accroît rapidement avec le temps, il est chaotique.

Ces deux critères (oscillation temporelle de la moyenne et distance quadratique) permettent d'obtenir différentes régions dynamiques décrites par le champ moyen : la figure 3 montre l'étendue de ces domaines respectifs (point fixe, oscillations synchronisées, chaos oscillant et chaos) en fonction des paramètres d et J (qui définissent les lois des poids synaptiques). L'abscisse donne ici le paramètre de distance d , et l'ordonnée donne l'écart-type de référence J , qui peut dans ce cas être assimilé à un paramètre de gain pour la fonction de transfert. Les deux frontières exposées sur cette figure décrivent la transition entre une dynamique de point fixe et une dynamique chaotique (au sens de la distance quadratique moyenne), et la transition entre une dynamique de point fixe et une dynamique cyclique synchronisée. La superposition des deux courbes met en évidence une zone (au centre) où la dynamique est à la fois synchronisée et chaotique. L'attracteur peut alors être vu comme une boule gaussienne étirée sur un cycle.

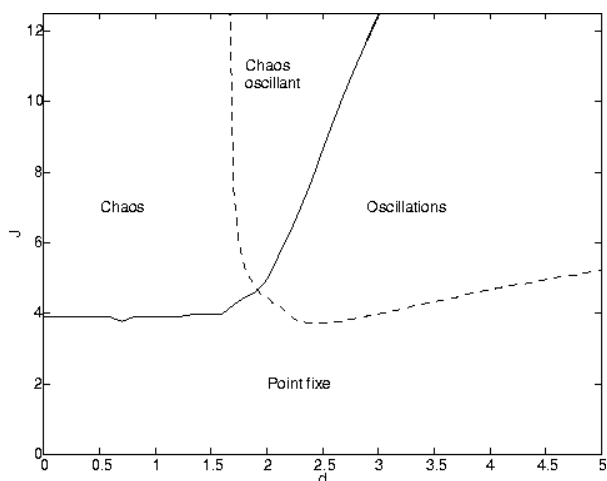


Figure 3 — Domaines dynamiques obtenus avec le champ moyen, en fonction de d et J . Les paramètres des seuils sont fixés à : $\bar{\theta}^1 = 0$, $\sigma_\theta^1 = 0$, $\bar{\theta}^2 = 0.3$, $\sigma_\theta^2 = 0$.

Nous allons illustrer sur un réseau de taille finie les caractéristiques de la dynamique chaotique synchronisée (ou chaos oscillant). La figure 4 montre les signaux d'activation d'une trentaine de neurones extraits de la population excitatrice d'un réseau de taille finie ($n^1 = 100$, $n^2 = 100$). Malgré son caractère chaotique, la dynamique présente une activité plus marquée tous les 5 pas de temps, où un grand nombre de neurones tirent simultanément. L'analyse par transformée de Fourier de la dynamique présentée indique d'ailleurs une période sous-jacente de 4,9. Il faut ici noter que cette période dépend des paramètres qui définissent les poids. On remarque par ailleurs que certains neurones restent silencieux (signal plat).

La dynamique d'un tel réseau présente des analogies avec certains comportements rythmiques observés dans les premières couches de traitement de l'information sensorielle (MacLeod et Laurent, 1996).

Par extension, notre modèle propose une explication sur la manière dont les vrais neurones s'organisent pour générer des rythmes.

6. Conclusions et perspectives

Les équations de champ moyen présentent la propriété de décrire de manière précise le comportement de réseaux aléatoires, individuellement très complexes. Pourvu que leur taille soit suffisamment grande, de tels réseaux pourront être contrôlés par un nombre restreint de paramètres. L'implantation ici d'un modèle à deux populations nous a permis, outre d'illustrer la justesse du champ moyen dans ce cadre nouveau, de mettre en évidence des comportements qui reproduisent des dynamiques réelles observées en biologie. Dans ce cadre, on a montré l'influence d'une population d'inhibiteurs dans la génération de régularités internes propices au codage de l'information.

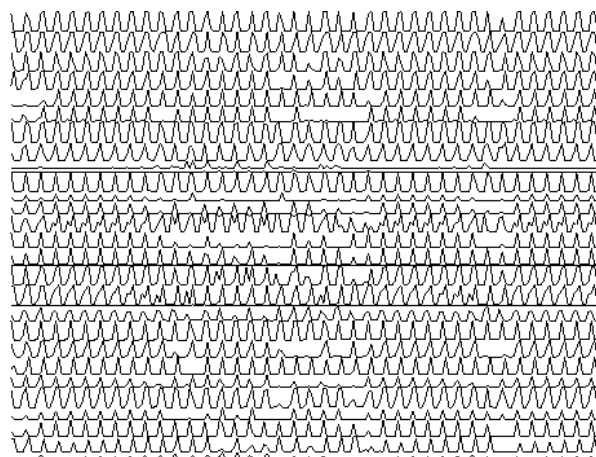


Figure 4 — Comportement dynamique du réseau excitateur à taille finie. Le diagramme représente l'activité dynamique des 30 premiers neurones de la population excitatrice, sur 200 pas de temps. Tous les signaux sont à la même échelle, et sont compris entre 0 et 1. Paramètres : $J = 8$, $d = 2$, $N = 200$ ($n^1 = 100$, $n^2 = 100$), $\bar{\theta}^1 = 0$, $\sigma_\theta^1 = 0$, $\bar{\theta}^2 = 0.3$, $\sigma_\theta^2 = 0.1$.

L'étape ultérieure de ce travail pourrait être d'étudier sur ce modèle un processus d'encodage effectif de l'information, par le biais d'une règle d'apprentissage portant sur les poids synaptiques. Une autre piste intéressante serait de parvenir à étendre la preuve mathématique de la convergence vers le champ moyen à des réseaux de neurones biologiquement plus plausibles, à savoir des réseaux non totalement interconnectés ou comportant des délais de transmission de l'information entre les neurones. Des simulations donnent à penser que nos résultats peuvent en effet être étendus. Toutefois, les extensions possibles doivent conserver une homogénéité globale du système et ne pas trop différencier les lois des neurones individuels.

Ce travail illustre de manière plus générale les apports mutuels des mathématiques, de l'informatique et de la biologie dans la compréhension des processus d'organisation collective, qui sont le fondement même de tout processus cognitif.

Références bibliographiques

[Amari, 1972] Amari S. (1972). Characteristics of random Nets of analog Neuron-like Elements, *IEEE Trans. Syst. Man. Cyb.* Vol SMC-2. N°5.

[Ben Arous et Guionnet, 1995] Ben Arous G., Guionnet A. (1995). Large deviations for langevin spin glass dynamics. *Probability theory and related fields.* 102. 455-509.

[Buzsaki et al., 1994] Buzsáki G., Bragin A., Chrobak J. J., Nádasdy Z., Sik A., Hsu M., Ylinen A. (1994). Oscillatory and intermittent synchrony in the hippocampus : relevance to memory trace information. In Berlin Heidelberg : Springer-Verlag. *Temporal Coding in the Brain.*

[Cessac et al., 1994] Cessac B., Doyon B., Quoy M., Samuelides M. (1994). Mean-Field equations, bifurcation map and route to chaos in discrete time neural networks. *PhysicaD* 74. 24-44.

[Crisanti et Sompolinsky, 1987] Crisanti A., Sompolinsky H. (1987). Dynamics of spin systems with randomly asymmetric bounds : Ising spins and glauher dynamics. *Phys. review A.*

[Daucé et al., 1999] Daucé E., Moynot O., Pinaud O., Samuelides M. (1999). In rapport DRET, Onera *Etude de la dynamique de réseaux neuronaux aléatoires récurrents*, RT 3/3739.00/DTIM.

[Geman, 1982] Geman S. (1982). Almost sure stable oscillations in a large system of randomly coupled equations. *Siam J. Appl. Math.* 42. 695-703.

[Geman et Hwang, 1982] Geman S., Hwang C. R. (1982). A chaos hypothesis for some Large Systems of random equations. *Z. Wahr. Verw. Gebiete.* 60. 291-314.

[Gray et al., 1989] Gray, C. M. Konig P., Engel A.K., Singer W. (1989). Oscillatory responses in cat visual cortex exhibit inter-columnar synchronization which reflect global stimulus properties. *Nature* 7. 338-334.

[Guionnet, 1997] Guionnet A. (1997). Averaged and quenched propagation of chaos for spin glass dynamics. *Probability theory and related fields.* 109. 183-215.

[Hansel et Sompolinsky, 1996] Hansel D., Sompolinsky H. (1996). Chaos and synchrony in a model of a hypercolumn in visual cortex. *J. Comp. Neurosc.* 3. 7-34.

[MacLeod et Laurent, 1996] MacLeod K., Laurent G. (1996). Distinct mechanisms for synchronization and temporal patterning of odor-encoding cell assemblies. *Science* 274. 976-979.

[Martinerie et al, 1998] Martinerie J., Adam C., Le van Quyen M., Baulac M., Renault B. and Varela F.J. (1998). Epileptic crisis can be anticipated by non linear analysis. *Nature Medicine.* 4. 1173-1176.

[Pomeau et Derrida, 1986] Pomeau Y., Derrida B. (1986). Random networks of automata : a simple annealed approximation. *Europhys. Lett.* 1. 45-59.

[Sompolinsky et al., 1988] Sompolinsky H., Crisanti A., Sommers H.J. (1988) Chaos in random neural networks. *Phys.Rev.Lett.* 61. 259-262.