Cahiers Romans de Sciences Cognitives, Cuadernos Romances de Ciencias Cognitivas, Cadernos Românicos em Ciências Cognitivas, Quaderni Romanzi di Scienze Cognitive
In Cognito (2003), 1(2), 53-72

STRATÉGIES SPONTANÉES DE RECHERCHE DE CONTRE-EXEMPLES MATHÉMATIQUES

UNE OBSERVATION EN CLASSES PRÉPARATOIRES

Nicolas GAUVRIT

Université de Metz, dpt de psychologie — Ile du Saulcy — 57 000 METZ
Mél : adems@free.fr

Résumé

L'article qui suit présente une étude prospective sur le thème de la recherche de contre-exemples. Nous y étudions pour les comparer les stratégies spontanées de sujets experts et novices dans des tâches mathématiques de niveau universitaire. Nous dégageons quelques heuristiques spécifiques à l'œuvre dans ce type de problèmes et nous proposons des hypothèses catégorielles permettant d'expliquer les différences entre les groupes novice et expert.

Abstract

SPONTANEOUS UNDERGRADUATE STRATEGIES IN MATHEMATICAL COUNTEREXAMPLE FINDING TASKS : AN OBSERVATION

This paper presents a prospective view in the field of counter-example problem solving. We study and compare the spontaneous strategies of expert and novice subjects in finding mathematical graduate-level counter-examples. We bring out a few specific heuristics used in such a situation and suggest categorial hypothesis to explain the difference between novice and expert groups.

Riassunto

STRATEGIE SPONTANEE PER LA RICERCA DI CONTRO-ESEMPI MATEMATICI. UN'OSSERVAZIONE NELLE "CLASSES PRÉPARATOIRES" FRANCESI.

L'articolo che segue presenta uno studio esplorativo sul tema della ricerca di contro-esempi. Si studiano comparativamente le strategie spontanee di soggetti esperti e principianti in esercizi di matematica a livello universitario. Si mettono in evidenza alcune euristiche specifiche che sono all'opera in questo tipo di problemi e si propongono i presupposti categoriali che permettono di spiegare le differenze fra gruppi di principianti e esperti.

Resumen

ESTRATEGIAS ESPONTÁNEAS DE CONTRA-EJEMPLOS MATEMÁTICOS UNA OBSERVACIÓN EN CURSOS DE PREPARACIÓN A LOS CONCURSOS DE LAS ESCUELAS DE INGENIERIA FRANCESAS

El artículo a continuación presenta un estudio prospectivo sobre el tema de la búsqueda de contra-ejemplos. Se estudian para compararlas entre sí las estrategias espontáneas de *individuos expertos y novatos en tareas matemáticas de nivel universitario. Se sacan algunas heurísticas específicas operando en este tipo de problemas y se proponen hypótesis categoriales que permiten explicar las diferencias observadas entre los grupos expertos y novatos.*

Resumo

O artigo que segue apresenta um estudo prospectivo sobre o tema da pesquisa de contra-exemplos. Estuda-se para comparação as estratégias espontâneas de sujeitos especialistas e novatos em tarefas matemáticas de nível universitário. Depreende-se algumas heurísticas específicas operando nesse tipo de problema e propõe-se hipóteses categoriais permitindo explicar as diferenças entre os grupos novato e especialista

1. Introduction

Lakatos (1976) notait l'importance historique des contre-exemples mathématiques. Leur poids pédagogique fut également abordé. Hasemann (1988) montre par exemple l'effet positif des constructions de contre-exemples pour la compréhension des mathématiques. Les modalités de leur utilisation furent aussi l'objet d'études (Wolf, 1969 pour l'utilisation des contre-exemples par les enseignants), comme leur reconnaissance en tant que contre-exemples (Benbachir et Zaki, 2001a ; Balacheff, 1978 pour la perception de la contradiction). D'autres auteurs (Thompson, 1991 ; Hitt, 1998) soulignent la difficulté des exercices de recherche de contre-exemples. Quelques recherches ont abordé le problème des contre-exemples « de front », en proposant des exercices, et pas seulement des tâches de reconnaissance de contre-exemples (Benbachir et Zaki, 2001b). Pourtant, le processus de leur résolution n'a pas, semble-t-il, été étudié expérimentalement d'un point de vue descriptif et psychologique.

De même, si les travaux impliquant des comparaisons entre experts et novices sont légion, il ne semble pas y avoir eu de recherche de telles comparaisons dans le cas précis des stratégies de recherche de contre-exemples. Le lien entre ces recherches et notre étude serait purement méthodologique, n'étant dû qu'à la similitude des procédés utilisés, et non aux résultats, car la recherche de contre-exemples est un thème singulier.

Les problèmes de recherche de contre-exemples sont en effet particuliers, car ils se situent à l'intersection de plusieurs thèmes récurrents de la recherche psychologique contemporaine. De plein droit dans la résolution de problèmes, ils y sont en marge comme cas particuliers, bien que l'on doive leur appliquer les résultats généraux de la résolution de problèmes (Newell et Simon, 1972 ; Richard, 1990 ; Richard, 1994). Naturellement inclus dans les thèmes soulevés par les savoirs et leur acquisition en sciences de l'éducation, ils ont également un lien fort avec les questions de catégorisation.

Plusieurs concepts bien établis sont utiles pour comprendre la recherche de contre-exemples. La *résolution de problèmes*, notamment grâce aux notions de restriction, d'heuristique et de bifurcation, permet de décrire en trois étapes fondamentales le processus de recherche. Le *rapport au savoir*, étudié en sciences de l'éducation, a certainement un effet sur les résultats que l'on peut obtenir. Enfin, la théorie de la *catégorisation* permet de jeter un regard original sur notre thème.

L'étude que nous présentons s'appuie sur une problématique et des hypothèses de départ que nous préciserons avant de détailler le processus expérimental lui-même.

Enfin, les résultats que nous obtenons permettent dans un premier temps de dégager, comme prévu par la théorie de la résolution de problèmes, *les trois étapes essentielles de la recherche* que sont la restriction, l'utilisation des heuristiques puis le recours éventuel aux bifurcations. Ces trois étapes, quand elles s'appliquent à la recherche de contre-exemples, ont des caractéristiques particulières. Dans un deuxième temps, on pourra dégager *trois différences principales* entre les stratégies experte et novice, qui concernent les restrictions, les bifurcations, et enfin l'utilisation des prototypes, en lien avec l'organisation interne des catégories.

1.1. Résolution de problèmes et contre-exemples

En tant que problème, une recherche de contre-exemples mathématiques est bien définie (Reitman, 1964), puisque les états initial et final le sont. En revanche les opérations licites sont en nombre infini, ce qui rend très délicate une modélisation informatique complète de la résolution d'un tel processus. Il s'agit en outre d'un problème impliquant une pensée productive (Wertheimer, 1959), et donc nécessitant l'utilisation d'heuristiques, car il n'y a pas de méthode permettant de construire un contre-exemple en toute généralité.

Les problèmes utilisés habituellement dans les études de résolution sont structurellement plus simples — il s'agit typiquement du jeu d'échecs, de la tour de Hanoï, du problème des neuf points, etc., pour une revue de la question, voir par exemple Kellogg (2003) — ce qui les rend plus aisément formalisables.

Cependant, les mouvements et les stratégies développés par les sujets en situation de recherche de contre-exemples sont similaires, dans les grandes lignes, à ce qu'on observe dans d'autres situations. C'est ainsi qu'après avoir déterminé une représentation du problème, le sujet sélectionne une heuristique, qui fournit une piste *(path)* de raisonnement. En cas d'échec, il sélectionne une autre heuristique et recommence.

Quelques points clefs dans le déroulement de la résolution sont à relever :

1.1.1. Restriction et heuristiques

Du fait que l'énoncé donne lieu à un espace-problème infini et perçu comme tel par les sujets, les recherches de contre-exemples commencent par la restriction de l'énoncé. Cette restriction s'effectue, comme nous le verrons, selon deux principes, qui correspondent à la *restriction intensionnelle* (choix d'une définition) et à la *restriction extensionnelle* (choix d'une classe d'objets mathématiques).

Les « novices » de notre étude, comme les experts, ont à leur disposition plusieurs approches conceptuelles possibles de l'énoncé. Une matrice par exemple peut être conçue comme un tableau de nombres, mais également comme une application linéaire. Il ne s'agit pas ici de deux ensembles de matrices différents, mais de deux définitions équivalentes des matrices. Chaque sujet privilégie l'une de ces interprétations (ce que nous appellerons restriction intensionnelle).

Il est connu que cette sélection d'une approche appropriée à la résolution du problème est un des points-clés de l'expertise (Wickelgren, 1972). Une « mauvaise restriction » explique des erreurs fréquentes. Durrand-Guerrier (1995) a notamment montré que de nombreuses conclusions fautives données par les étudiants en analyse viennent du fait qu'ils considèrent *a priori* les fonctions comme continues ou monotones par morceaux. Dans le même esprit, Duval (1993) note qu'un changement de « registre » (du registre formel au registre visuel, par exemple), que nous assimilerons ici à une modification de la restriction intensionnelle initiale, peut permettre de construire plus efficacement un contre-exemple. Cela est vrai en dépit du danger inhérent à l'utilisation d'une approche visuelle des objets mathématiques (analytiques en l'occurrence) dénoncé par Aspinwall *et al.* (1997).

Entre le choix d'une approche particulière et la découverte d'une solution — ou d'une impasse — les sujets utilisent des méthodes heuristiques de recherche. L'utilisation des heuristiques est, parmi les trois processus que nous évoquerons, celui qui distingue probablement le moins les experts des novices, bien que des différences apparaissent également.

1.1.2. Bifurcation

Les sujets de l'étude sont suffisamment compétents dans le domaine mathématique pour avoir à disposition des stratégies leur évitant un blocage définitif en cours de résolution. En revanche, il est très fréquent, du fait de la difficulté des questions, de voir tel individu abandonner une piste de raisonnement, pour repartir en utilisant une heuristique non encore utilisée. Ce changement d'heuristique, ce changement de piste, nous l'appellerons *bifurcation*.

Chaque fois qu'un sujet arrive à ce qu'il pense être une impasse, il est amené à y échapper par une bifurcation. Les impasses et les éventuelles fixations (assez rarement observées dans notre exemple car les *novices* disposent d'une compétence relativement poussée) ont été étudiées et furent l'objet de controverses. Weisberg et Alba (1981), grâce à une expérience portant entre autres sur le problème des neufs points, ont pu montrer que les sujets continuent à éprouver des difficultés avec ces problèmes même lorsqu'on les avise explicitement du fait que leurs hypothèses (supposées) de départ sont fausses. Les auteurs en concluent que la fixation n'a pas un rôle prépondérant dans l'explication des impasses. Dominowski, (1981), puis Ellen (1982) réhabiliteront partiellement la notion de fixation (tout en admettant que la notion pourrait être inutile), et surtout celle d'*insight* grâce à une lecture gestaltiste de la résolution de problèmes. Ellen insiste notamment sur une interprétation perceptive de la difficulté des problèmes en jeux.

Le jeu des impasses doit mener à un équilibre. D'une part, rester dans une impasse est bien évidemment un échec, et il est par conséquent préférable de s'en échapper au plus vite. L'étude qualitative de Thom et Pirie (2002) est à cet égard parlante. Des étudiants ont à déterminer le volume d'un cuboïde. Il s'agit d'un exercice délicat. Plusieurs blocages sont finalement surmontés : le fait de savoir « bifurquer » est important. D'autre part, la capacité à persévérer est également essentielle, car le chercheur de contre-exemple ne doit pas bifurquer alors qu'il est engagé dans une voie prometteuse. Lesh (1981), Pimm (1987), Hiebert (1989), ou encore Taplin (1995) définissent un bon « *problem solver* » comme un individu capable de persévérer (et non de bifurquer aisément). Le choix judicieux, ni précoce ni trop tardif, d'une bifurcation n'est bien entendu rendu possible que par un contrôle savant sur sa propre activité (Hart, 1989), sans doute plus efficace dans le groupe expert.

1.2. Le rapport au savoir

Une bifurcation est évidemment déterminée par le sentiment que la piste ne mène pas à la solution. Ce sentiment d'une piste inefficace à terme diffère d'une personne à l'autre, et, notamment, entre les experts et les novices. Au-delà des explications classiques et certaines — base de connaissances plus large chez les enseignants, par exemple — nous proposerons également de considérer comme un facteur potentiellement déterminant la position vis-à-vis de la science, et donc le rapport au savoir, qui pourrait influencer la légitimité perçue de telle ou telle manipulation. Ce rapport à la science est probablement lui-même dépendant de la présentation des mathématiques en classes préparatoires, et en particulier des contre-exemples.

Hitt (1998) notait que les étudiants n'étaient pas préparés à la recherche de contre-exemples, question atypique. En cela, on peut considérer à bon droit que les élèves des classes préparatoires, qui ne sont certes pas des *mathématiciens* novices, sont en revanche des *chercheurs de contre-exemples* novices. C'est pourquoi nous nous autoriserons à nommer *spontanées* les stratégies développées par les élèves de ces classes, entendant par là qu'ils créent, dans la situation de l'exercice de recherche de contre-exemples, un mode de raisonnement auquel ils ne sont pas habitués.

Le rapport de l'étudiant aux mathématiques est évidemment différent de celui de l'enseignant. Par nature, de par la place de l'étudiant dans la situation de classe, celui-ci est en état d'infériorité car il est toujours jugé, et jamais juge. Nunes *et al.* (1993) et Jurdak et Shahin (1999, 2001), ont pu montrer que les méthodes de raisonnement mises en œuvre en mathématiques naïves varient selon que le sujet se trouve sur son lieu de travail ou dans une salle de classe. Le simple fait d'être interrogé dans une salle de classe pourrait pousser les étudiants à adopter des stratégies de raisonnement stéréotypées, dont une interrogation à l'extérieur les libérerait.

Mais le rapport au savoir ne se borne pas aux contingences sociales, ni à la place du novice par rapport à l'expert qui est ici considéré comme enseignant, ni encore à l'appréhension du novice face à un domaine qu'il ne maîtrise pas. L'objet mathématique lui-même, sur lequel porte l'interrogation, est perçu de manière totalement différente selon que l'on est novice ou expert. Nous suggèrerons plus loin que la perception experte des objets est dans un certain sens plus réelle, dans la mesure où les experts s'autorisent, sur les objets mathématiques, une panoplie d'actions (distorsions et aménagements) pensées *et dites* de manière concrète que les novices n'envisagent pas.

Cette asymétrie entre l'expert et le novice est encore renforcée par le fait que le novice est *particulièrement* novice en ce qui concerne la recherche de contre-exemples, comme nous l'avons noté plus haut.

1.3. Catégorisation, logique et contre-exemples

La catégorisation est l'aptitude mentale à former des « catégories », c'est-à-dire des ensembles naturels d'objets — ainsi l'ensemble des animaux est une catégorie, perçue comme une entité ; au contraire l'ensemble formé par les lapins et les tomates n'est pas une catégorie, car elle est perçue comme la juxtaposition de deux entités, et non comme un groupe cohérent. Rosch (1973) a pu mettre en évidence certaines caractéristiques des catégories qui les distinguent nettement des ensembles classiques. Notamment, certains éléments des catégories sont plus représentatifs que d'autres. Les catégories sont construites autour de « prototypes », éléments particuliers et représentatifs qui les déterminent. Mais c'est quand on aborde la question des réunions et des intersections que les catégories se distinguent très nettement des ensembles de la théorie classique, car leur classe ne semble pas stable par ces opérations.

Or, de manière générale, un problème de recherche de contre-exemples s'énonce sous la forme catégorielle : « trouver un élément de *A-B* », où *A* et *B* sont deux catégories. Il pose ainsi la question du complémentaire d'une catégorie dans une autre. Depuis l'avènement des logiques non-classiques pour la partie formelle, voir par exemple Goldblatt (1984), et depuis les recherches sur les catégories pour la partie psychologique (Rosch, 1973 ; Gauvrit, 2001), il est admis que le complémentaire d'une catégorie n'est pas habituellement une catégorie. Aussi, bien que la recherche de contre-exemples soit associée aux problèmes catégoriels, elle aborde les questions correspondantes sous un jour nouveau.

Benbachir et Zaki (2001a) notaient que, en règle générale, les questions concernant les contre-exemples ne sont pas formulées explicitement sous la forme d'une conjonction incluant une proposition négative. Pour que ces questions soient réellement perçues comme des problèmes de recherche de contre-exemples, il faut que le sujet perçoive une « contradiction », qui est, remarque Balacheff (1978), seulement contradictoire au sein d'un système cognitif particulier. Les sujets interrogés semblent tous avoir perçu cette « contradiction ».

Le terme même de contradiction doit être ici décrit un peu plus finement. Glaeser (1987) distingue les contradictions logiques et les contradictions factuelles. Les contradictions factuelles, écrit-il, « interviennent lorsque des faits observés démentent des prévisions (pseudo) scientifiques ». Autrement dit, il nomme contradiction factuelle un *paradoxe*. Le fait qu'un paradoxe soit perçu indique que la catégorie-pivot, *A*, n'est pas suffisamment limitée, et englobe la catégorie *B.* C'est ce qui fait, sans doute, l'intérêt des exercices de recherche de contre-exemples, car l'étudiant est poussé, comme le souhaitait Resnick (1983), à reconfigurer lui-même la catégorie par cette activité, et donc à former graduellement ses concepts (ici synonyme de catégories).

On peut également présenter les problèmes de recherche de contre-exemples sous forme logique, en disant qu'il s'agit d'un énoncé de la forme : trouver un objet *x* vérifiant *P et non Q*. C'est alors la négation, équivalent logique du complémentaire, qui devient le thème central de l'étude, et dont Vergnaud (1994) notait la difficulté conceptuelle.

2. Description de l'étude

Nous avons suivi quatre Classes Préparatoires aux Grandes Ecoles (CPGE) — PSI, MPSI, MP, MP* — en situation d'interrogation orale (colles), au lycée Blaise Pascal à Orsay (France), pendant l'année scolaire 2000-2001.

Les étudiants des classes étudiées sont habitués, dès le début de l'année scolaire, à subir des interrogations orales, à raison de deux par semaine. La situation d'interrogation est donc pour eux coutumière.

2.1. Problématique

Dans les exercices proposés pour cette étude, nous partons de l'hypothèse que les questions sont *fondamentalement* des problèmes de recherche de contre-exemples. Aussi, bien que l'énoncé ne contienne pas toujours l'évocation d'une complémentation, nous supposons que les processus particuliers à ce type de questions, s'ils existent, sont néanmoins utilisés par les sujets, qui reconnaissent dans l'énoncé un problème de recherche de contre-exemples.

L'étude qui suit apporte des éléments qui laissent penser que les contre-exemples, outre qu'ils permettent de vérifier des résultats déjà bien démontrés en résolution de problèmes, laissent entrevoir également d'autres heuristiques, d'autres caractéristiques de l'expertise mathématique.

Nous essaierons, en tentant de synthétiser les différents points de vue (celui de la résolution de problèmes, celui de la didactique, et l'approche logico-catégorielle), d'expliquer la supériorité observée (en termes de rapidité) du groupe expert, en passant en revue les points-clés que sont (1) la restriction de l'énoncé (2) le choix d'une heuristique et (3) les facteurs de bifurcation. Nous verrons que les experts et les novices ont des modes de fonctionnement très similaires, mais non parfaitement identiques. Nous essayerons enfin d'expliquer les différences constatées par le rapport au savoir. La portée de cette explication sera toutefois relativisée par l'effet éventuel du contrat didactique.

2.2. Sujets

L'ensemble des sujets est formé d'élèves de classes préparatoires pour l'échantillon « *novices* », et de chercheurs en mathématiques pures, professeurs de classes préparatoires et d'université pour le groupe « *experts* ».

Au total, 37 étudiants, de sexe masculin et âgés de 18 à 21 ans, ont participé à l'expérience et constituent le groupe *novice*. 6 experts répondant chacun à six questions choisies aléatoirement formaient le groupe *expert*. Le groupe expert a donc été soumis aux mêmes questions que le groupe novice, mais les experts répondaient à plusieurs questions, ce qui n'était pas le cas des novices.

2.3. Matériel

Le matériel expérimental est formé d'une liste de 30 questions qui couvre l'ensemble du programme officiel de mathématiques. Il s'agit dans chaque cas de trouver un exemple d'objet vérifiant les conditions demandées (voir en annexe la liste des questions). Les questions portent toujours sur des objets mathématiques que les étudiants ont étudiés pendant la quinzaine qui précède la passation, ce qui assure qu'ils sont bien à cet égard en situation de novices.

2.4. Procédure

Chaque semaine, un élève parmi les trois présents pour l'interrogation orale était déterminé aléatoirement. Nous lui avons alors soumis une question de la liste, choisie en fonction de l'avancement de l'année scolaire. Chaque sujet novice répond à une unique question de la liste. Certaines questions ont en revanche été proposées plusieurs fois.

Les sujets sont informés que la question de recherche de contre-exemple ne fait pas partie intégrante de l'interrogation orale et qu'ils ne seront en aucun cas évalués sur leur réponse. La consigne est neutre (par exemple : « Donnez un exemple de groupe qui ne soit pas abélien. Prévenez-moi quand que vous aurez trouvé », question 5.c). On relevait le temps mis pour arriver à un résultat acceptable, mais les sujets ne sont pas informés de ce fait (au bout de 15 minutes, l'expérience est interrompue en cas d'échec). L'expérimentateur n'intervient pas avant que le sujet ne propose une solution.

Un entretien personnel de dix à vingt minutes permettait ensuite de définir l'histoire de la stratégie utilisée par l'étudiant. La première question de l'entretien semi-structuré est toujours : « Quand vous avez commencé à chercher, quelle a été votre première idée ? Essayez de vous souvenir de ce qui vous est venu à l'esprit en premier ». Les sujets sont invités à reconstituer étape par étape leur cheminement, en précisant à chaque pas s'ils se sont représenté visuellement les objets mathématiques.

Pour l'énoncé 3.e (une fonction dérivable à droite et à gauche qui ne soit pas dérivable), le novice a donné au bout de huit minutes la réponse « valeur absolue » qui est adéquate.

Encart 1 — *Exemple (3.e, novice). On constate deux bifurcations, signalées par le signe (*).*

[Expérimentateur] — Quand vous avez commencé à chercher, quelle a été votre première idée ? Essayez de vous souvenir de ce qui vous est venu à l'esprit en premier.

[Étudiant] — J'ai d'abord pensé que la dérivée à droite et la dérivée à gauche devaient tendre vers des valeurs différentes, et que la dérivée devait tendre vers l'infini.

— Et ensuite ?

— (*) J'ai cherché une fonction dérivable nulle part. J'ai essayé avec la fonction caractéristique de $\mathbf{Q}$, mais elle n'est pas dérivable à gauche.

—...

— (*) Et puis j'ai imaginé la fonction, et je me suis dit qu'elle devait avoir deux pentes différentes, comme la valeur absolue.

— Avez-vous visualisé le graphe de la fonction d'abord, ou bien avez-vous en premier lieu pensé à la fonction, dont le graphe vous est apparu ?

— Je crois que j'ai d'abord vu le graphe.

La procédure pour le groupe *expert* est identique à celle du groupe *novice.* L'un des experts interrogés sur la même question fournit la même réponse en 2 minutes. Son cheminement est assez différent (l'entretien est reproduit dans l'encart 2).

Le cheminement expert comprend donc une bifurcation et une stratégie efficace. Il paraît donc plus efficace. Il est en effet plus rapide, comprend une bifurcation de moins, une impasse de moins. En outre, il utilise dès le départ une stratégie visuelle ou, tout au moins, aidée par l'image, ce qui ne semble pas être le cas du novice. Toutefois, les deux raisonnements sont remarquablement similaires : les résultats finals sont identiques, et les stratégies efficaces sont, sinon parfaitement identiques, au moins proches.

Encart 2 — *Exemple (3.e, expert). On constate une bifurcation, signalée par le symbole (*).*

> [Expérimentateur] — Quand vous avez commencé à chercher, quelle a été votre première idée ? Essayez de vous souvenir de ce qui vous est venu à l'esprit en premier.
>
> [Expert] — J'ai d'abord visualisé le graphe d'une fonction presque continue, car il me semble que la fonction cherchée doit être assez régulière. J'ai choisi une fonction qui a un « décrochement » en 0, la fonction signe. Mais elle n'est dérivable ni à gauche ni à droite.
>
> —...
>
> — (*) J'ai ensuite réfléchi au fait que la fonction cherchée est nécessairement continue et que c'est en termes de pente qu'il faut raisonner. J'ai imaginé une fonction ayant deux pentes (gauche et droite) différentes : la valeur absolue.
>
> — Avez-vous vu le graphe d'abord, pour en déduire la fonction, ou avez-vous au contraire pensé en premier lieu à la fonction, dont le graphe vous est apparu ?
>
> — Les deux sont arrivés en même temps.

3. Résultats et discussion

La prééminence des compétences expertes est claire. Tous les experts ont répondu correctement aux questions posées, contre 73 % des novices. Le temps de réponse des experts (moyenne : 1.77 minutes), sur notre population, est inférieur à celui des novices (moyenne : 9.84 minutes). Pour un même énoncé, le nombre de bifurcations est toujours inférieur ou égal chez les experts.

Les raisons les plus évidentes de cette supériorité experte ont déjà été étudiées dans de nombreuses situations, et l'expérience présente confirme les résultats fondamentaux mis en évidence : importance de l'organisation hiérarchique des connaissances, accès à une base de données plus importante, etc. Nous ne reviendrons pas sur ces faits. Mais l'expérience permet également de dégager d'autres explications de la différence entre les groupes, et de révéler des similitudes profondes entre les stratégies experte et novice.

3.1. Trois étapes dans la recherche de contre-exemples

Les exercices proposés sont toujours assez généraux en ce sens qu'ils ne portent pas sur des ensembles finis. Les réponses possibles sont donc en nombre infini ; pourtant, elles sont stéréotypées. Ainsi, à la question 1.b, qui a été posée plusieurs fois, les deux experts et les trois novices ont donné la même réponse, à savoir

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ou sa transposée. Pour d'autres questions les similitudes sont moins frappantes : pour la question 3.h, l'expert donne la suite des $\frac{1}{n}1_{\mathbf{Q}}$ et le novice, $\frac{1}{2^n}1_{\mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}}$. En cherchant les raisons de ce caractère stéréotypé, nous avons été conduits à parcourir le déroulement du processus de recherche depuis le point de départ, avec la restriction de l'espace d'exploration ; puis l'utilisation d'heuristiques ; et enfin, en cas d'échec, le recours aux bifurcations.

Nous signalons, lorsque cela se présente, anticipant ainsi sur la section suivante, les points de divergence entre les groupes expert et novice.

3.1.1. Restriction

Du fait de la généralité des questions, les sujets sont amenés à restreindre, avant de commencer la résolution proprement dite, l'énoncé selon deux principes :

– Une restriction « extensionnelle » de l'espace d'exploration, c'est-à-dire ici que les sujets se placent d'emblée dans un cas particulier, perçu comme tel. C'est ainsi que pour la question 4.b (intersection décroissante fermée d'ouverts) l'expert se place dans la droite réelle et le novice dans le plan.

– Le choix d'une approche conceptuelle particulière, ce que l'on appellera une restriction « intensionnelle », c'est-à-dire ici que les sujets choisissent de considérer l'objet mathématique de base selon l'une de ses définitions. C'est ainsi que pour la question 1.c (une matrice dont le spectre est réduit à 0, mais qui ne soit pas nulle), l'expert choisit de considérer la matrice essentiellement comme un endomorphisme, et le novice comme un tableau de chiffres.

Cette distinction entre les restrictions extensionnelle et intensionnelle correspond à celle que font les logiciens entre d'une part la version extensionnelle de la logique, liée aux ensembles et à la sémantique, et d'autre part la version intensionnelle, liée au *sens* et à la syntaxe. Dans ce sens, l'extension d'un concept est l'ensemble des objets qui tombent sous le concept, tandis que l'intension d'un concept est le sens de sa définition, qui peut être assimilé au *point de vue* adopté.

Restriction extensionnelle — Nous interpréterons cette restriction en termes catégoriels — bien qu'on puisse évidemment envisager une autre approche — en disant qu'un *espace d'exploration*, dans le cadre de notre étude, est une sous-catégorie de la catégorie de base. Quand il s'agit par exemple de chercher un élément de la catégorie *A* qui n'appartienne pas à la catégorie *B*, les sujets, experts comme novices, n'envisagent pas réellement la catégorie *A*, mais une sous-catégorie de *A*, dont ils espèrent qu'elle contient un contre-exemple, donc un objet qui n'est pas dans *B*.

On remarque que les experts et les novices se placent souvent d'emblée dans les mêmes espaces d'exploration. Cela montre, comme on pouvait s'y attendre, que malgré la nouveauté des objets mathématiques abordés, les étudiants ont déjà des représentations (cf. Astolfi et Develay, 1989) relativement proches, d'une certaine manière, de celles des experts, contrairement à ce qu'on observe habituellement dans les études en collège ou en lycée. Ainsi, toute question relative à des « fonctions » est interprétée comme portant sur des fonctions réelles d'une variable réelle. Toute question matricielle est entamée en dimension 2 et avec des matrices carrées.

La question 1.f est à cet égard riche d'enseignements : un raisonnement simple et rapide convainc les sujets que deux matrices carrées ne sauraient convenir. Pourtant, la recherche commence toujours par les matrices 2x2. L'expert comme le novice a débuté dans un espace impossible.

Ce choix initial d'un espace d'exploration est mené en conciliant deux demandes contradictoires :

1. L'espace doit être suffisamment général pour permettre la découverte d'un contre-exemple (exigence de généralité).

2. L'espace doit être le plus élémentaire possible pour faciliter l'exploration (exigence de simplicité).

Nous retrouvons ici des caractéristiques que Rosch attribuait au « niveau de base » (Rosch, 1973), et nous obtenons effectivement, avec ce double principe, un « espace de base », souvent identique dans les deux groupes, hormis quelques exceptions :

Une question où il s'avère par exemple que l'espace expert diffère de l'espace novice est la question 1.g (un endomorphisme non injectif). L'expert fait référence automatiquement à un contre-exemple connu en dimension infinie. Le novice débute en dimension 2. De même, nous avons noté plus haut pour la question 4.b que l'expert se place dans la droite réelle et le novice dans le plan.

Restriction intensionnelle — Contrairement à ce que l'on avait remarqué dans le cas de la restriction de l'espace d'exploration, il y a ici une différence quasi-systématique entre les novices et les experts. Ces derniers privilégient en effet les interprétations intuitives ou visuelles, alors que les novices ont bien souvent recours à la formalisation. Par exemple, un groupe est pour l'expert une partie de S_n, donc un ensemble de permutations, alors que le novice déroule la liste des propriétés définitoires des groupes. Il est évident que cette approche est moins efficace que la première, et il est probable que le novice ne l'adopte pas à la suite d'une décision réfléchie, mais parce que la catégorie psychologique « groupe » n'est pas encore totalement formée chez lui, ce qui lui interdit la stratégie experte.

Il semble dans l'exemple suivant (encart 3) que la notion de fonction continue, qui est accessible au novice, ne soit pas agrégée autour d'une représentation forte comme elle l'est pour l'expert. L'expert n'a pas de doute sur sa perception d'une fonction continue, et la courbe qu'il imagine est un prototype de graphe de fonction continue. Au contraire, le novice, qui utilise ici la même représentation mentale, fait un retour à la définition de la continuité parce que la catégorie « fonction continue », c'est du moins l'interprétation la plus évidente, est en cours de formation. Aussi ne perçoit-il pas ses prototypes comme fiables.

Pour la question 3.h (une suite de fonctions discontinues partout dont la limite est continue partout), les entretiens furent les suivants :

Encart 3 — *Question 3.h, expert et novice*

[Expérimentateur] — … quelle a été votre première idée ?…

[Expert] — J'ai visualisé des nuages de points (fonctions très discontinues) qui s'agrègent autour d'une courbe. Je sais que je peux choisir la courbe limite sans problème, et j'ai donc décidé de prendre la fonction nulle, et je propose

$$f_n = \frac{1}{n} 1_{\mathbf{Q}}$$

Le novice fournit pour sa part l'explication suivante :

— J'ai tout de suite vu la fonction caractéristique de $\mathbf{Q}$, mais je ne savais pas comment l'arranger pour que ça devienne continu. J'ai abandonné. J'ai ensuite cherché comment faire tendre une fonction vers 0.

— Pourquoi vers 0 ? est-ce un choix ou bien pensez-vous que la suite tendait nécessairement vers 0 ?

— Je pensais qu'elle tendait forcément vers 0. Comme je ne voyais pas, j'ai écrit la négation de la continuité d'une fonction, mais je me suis embrouillé. Enfin, j'ai eu l'idée de diviser la fonction de départ par 2^n, mais je ne suis pas sûr du résultat.

3.1.2. Heuristiques

Les différentes méthodes utilisées par les sujets pour commencer la recherche se décomposent en une suite d'heuristiques, qui définissent le chemin exploratoire. Deux heuristiques fréquentes ressortent de notre étude.

Appel de prototypes — Une des principales heuristiques est l'appel de prototypes : le sujet « essaye » des objets mathématiques connus, habituellement stéréotypés et très représentatifs de la classe considérée. Si les premiers prototypes échouent, il passe en revue la liste des objets courants de la catégorie (que l'on peut considérer comme des prototypes secondaires). Cette heuristique est utilisée aussi bien par les experts que les novices, mais ces derniers ne semblent pas disposer de méthodes de choix aussi performantes que les experts.

Formalisation — Une heuristique plus novice qu'experte est celle de la formalisation. Il s'agit d'une méthode très avancée, qui suppose d'avoir atteint une maîtrise logique : les sujets procèdent à une analyse logique formelle de l'état courant pour déterminer une éventuelle réduction.

Par exemple, pour la question 5.a, deux novices ont raisonné en disant « pour qu'une relation ne soit ni d'ordre, ni d'équivalence, il suffit qu'elle ne soit pas réflexive. Je cherche donc une relation non réflexive ».

3.1.3. Bifurcation

Les experts savent, mieux que les novices, évaluer la distance entre l'état courant et le but. En particulier, les experts sont capables d'évaluer des distances plus grandes que celles évaluées par les novices. C'est ainsi que l'expert ayant pensé, pour la question 5.b (partie bornée sans plus grand élément), à un intervalle fermé, affirme qu'il est alors facile d'arriver à la solution. Avant d'avoir « retiré le plus grand élément », il savait déjà que la solution était accessible. Le novice, ayant proposé comme première idée un intervalle fermé borné, reste bloqué, ne voyant pas la solution, et propose ensuite, mais après bifurcation, un segment borné ouvert. Cela rejoint ce que nous avons noté dans la section 1.2 concernant la manière de penser et de dire les actions et les objets mathématiques. Le novice évaluait la distance au but plus grande que ne le faisait l'expert. C'est ce que remarquait Vergnaud (1994) en comparant les activités d'enfants et d'adolescents sur le thème de la proportionnalité.

Il semble que, par rapport aux experts, les novices souffrent d'une « myopie mathématique », dans la mesure où, bien souvent, ils s'arrêtent et bifurquent alors qu'ils ont atteint un état « proche » de la solution. Ainsi, pour la question 3.g, un expert et un novice étaient arrivés au même état : la considération de la fonction –*id*. Tous deux perçoivent le « problème en 0 », mais alors que l'expert le résout en changeant la valeur de la fonction en ce point, le novice abandonne et change de stratégie. Il avait sur-évalué la distance le séparant du but (on proposera plus loin une autre hypothèse explicative de la brève impasse où s'est trouvé le sujet novice).

Précisons que nous appelons ici « distance au but » une forme intrinsèque de distance et non pas la distance « pour le sujet ». On pourrait soutenir que la « distance au but » était effectivement grande pour le novice, puisqu'il n'arrive pas à la solution sans changer de stratégie, mais ce qui nous intéresse ici est la perception par le sujet non pas qu'*il* peut, ici, aboutir à la solution rapidement, mais qu'il *pourrait* aboutir à une solution. Le novice ne dit pas pour la question 3.g « peut-être pourrait-on arranger la fonction », mais « ça ne marche pas ». Une interprétation possible de son discours est qu'il évalue pour lui et pour les autres la distance entre son état et le but comme étant trop grande.

3.2. Différences expert-novice

Trois différences entre experts et novices sont particulièrement intéressantes, et nous nous bornerons à évoquer ces trois-là : il s'agit de différences observées à propos de restriction intensionnelle, de bifurcations et d'appel de prototypes.

3.2.1. Restriction intensionnelle

Les experts choisissent plus efficacement, semble-t-il, une définition, un point de vue adéquat sur l'objet de l'exercice. Ce qui est surtout remarquable n'est pas ce choix en lui-même, mais le fait que là où les novices choisissent effectivement une des définitions, l'expert peut pour sa part manipuler simultanément deux points de vue, et peut-être plus.

Pour les questions portant sur les matrices par exemple, les novices choisissent toujours soit la vision pratique (la matrice est un tableau de chiffres), soit la vision applicative (la matrice est une application). En revanche, il arrive à l'expert, par exemple sur la question 1.a, d'utiliser les deux représentations.

Une interprétation catégorielle est possible : l'expert a pu construire un prototype schématique de la catégorie des matrices qui synthétise les différents aspects dans un codage qui n'est ni visuel ni linguistique mais *structurel*, tandis que la même catégorie, en cours de formation chez le novice, est encore construite autour de prototypes plus concrets.

Cette interprétation est liée à l'hypothèse d'une évolution abstractive des prototypes : Ceux-ci se formant à partir des *exemplaires*, doivent dans un premier temps leur être similaires, avant de devenir plus abstraits. Dans cette perspective, nous pourrions dire que les prototypes sont d'abord des éléments particuliers, des objets concrets appartenant à la catégorie, avant de s'abstraire progressivement jusqu'à devenir des schémas, qui n'ont plus toutes les caractéristiques d'un objet réel. Le codage de ces prototypes, qui peut être dans un premier temps visuel, deviendrait par la suite structurel du fait même de l'évolution de la nature des prototypes.

3.2.2. Bifurcations

Il apparaît que les novices sont souvent « bloqués » pendant quelques dizaines de secondes, et entament une nouvelle stratégie, alors qu'ils se trouvent, de l'avis des experts, très proches de la solution.

Pour la question 1.i par exemple, un novice avait envisagé l'ensemble K[X] des polynômes, et la base canonique. Il est resté bloqué à ce point près d'une minute, alors qu'il suffisait pour répondre à l'énoncé de supprimer un des vecteurs de la base. La discussion qui a suivi a révélé une certaine stupéfaction du sujet face à l'idée que l'on pouvait « déformer une quasi-solution » pour forcer les choses.

Pour la question 3.a, un étudiant considérait la fonction caractéristique de $\mathbf{Q}$, prototype de fonction très discontinue. Le problème en 0 lui paraissait insoluble. La discussion qui a suivi a permis de découvrir qu'il n'envisageait pas de modifier « légèrement » sa fonction pour la rendre adaptée à la question.

Pourtant, dans les deux cas cités, les novices acceptent la solution, proposée après le test, et se déclarent convaincus par le raisonnement informel aboutissant à ces solutions.

Cela peut s'expliquer parfois par une mauvaise évaluation de la distance entre l'état courant et le but. Mais une autre explication, qui explique plus qu'elle ne contredit celle-ci est également à envisager.

Logique d'action — Il semble que les experts, contrairement aux novices, soient capables d'adopter une *logique d'action*, et de considérer les objets mathématiques comme des principes déformables, sur lesquels ils ont prise. Au contraire, les novices que nous avons pu observer sont tous restés tributaires d'une approche observatoire des exercices, et n'envisagent le monde mathématique dans le cadre de l'expérience que comme une donnée à contempler. Chercher un contre-exemple est rarement, pour un novice, synonyme de *construire* un contre-exemple. Cela explique la difficulté des élèves à terminer le problème après évocation d'un exemple « presque solution » — c'est-à-dire un exemple qui peut, en peu de lignes, fournir une solution au problème, d'une manière compréhensible par le sujet, et acceptable. Si le novice ne « déforme » pas l'intervalle fermé dans la question 5.b, il accepte comme pertinente l'idée, qui lui a été proposée après l'expérience, de « retirer le plus grand élément » — et qui donne une solution proche de celle qu'il a finalement proposée — mais sans percevoir ce cheminement comme un processus direct.

La question est alors de comprendre pourquoi les novices n'ont pas (pas encore) accès à cette logique d'action, si utile en l'occurrence. Nous proposons une explication simple à ce problème.

Rapport au savoir — Il se peut que l'étudiant, de par sa position dans le contrat didactique, cherche non à faire « des mathématiques », mais « les mathématiques » attendues. Cela implique pour lui de se placer en découvreur, et non en inventeur, car son but est de trouver ce que l'enseignant, ou l'expérimentateur, perçu comme un compagnon de l'enseignant, attend de lui, « la bonne réponse », prévue et déjà écrite.

Autrement dit, le novice se place en spectateur d'une vérité qui lui est extérieure. Il apprend les mathématiques et ne les déforme pas. Au contraire, l'enseignant est partie prenante dans l'aventure de la science, à tel point qu'il se place à l'intérieur de la mathématique, en constructeur de celle-ci.

3.2.3. Catégories et prototypes

En termes de catégories, la découverte de contre-exemples est la recherche d'un élément d'une classe de la forme *A\B (A-B* dans la notation bourbakiste). S'il est, en logique classique, aussi facile de s'appuyer sur *A* que sur *B*, et donc de chercher un *A* qui n'est pas *B* qu'un non-*B* qui est *A*, l'approche catégorielle perçoit une différence très nette entre les statuts de *A* et *B*. En effet, si *A* est bien une catégorie psychologique, non-*B* n'en est pas une, comme l'ont formalisé plusieurs logiques non-classiques prenant en charge les catégories — logique intuitionniste, logique pseudo-consistante, logique contextuelle. Aussi, les processus automatiques liés aux catégories sont-elles inutilisables sur *B*.

La catégorie pivot — Tous les sujets prennent appui sur *A*, en cherchant « un *A* qui n'est pas *B* ». Cette recherche est, bien entendu, grandement facilitée si la charge cognitive associée au pivot *A* (donc à l'hypothèse « *x* est *A* ») est faible. Or, pour qu'elle soit faible, il faut que la catégorie *A* soit véritablement une catégorie.

L'expérience montre de manière très nette que les structures algébriques en particulier ne sont pas, pour les novices, des catégories entièrement formées. Les groupes, les corps, les espaces vectoriels sont pour eux une suite de propriétés et non une classe naturelle. Ce fait fondamental explique en grande partie les échecs et la lenteur du processus novice. Ceci est également valable, dans une moindre mesure, pour les questions analytiques.

La récitation des propriétés de la continuité (3.a, 3.b, 3.h), de l'équivalence des fonctions (3.c, 3.d), de la diagonalisabilité des matrices (1.a, 1.b) est révélatrice d'une formation inachevée de la catégorie correspondante.

Prototypes contrexemplaires — En outre, les experts ont souvent recours à ce qu'ils nomment eux-mêmes des « prototypes » ou des « archétypes » contrexemplaires. D'une certaine manière, chercher un élément de *A-B* revient à chercher un « objet générique » de *A,* qui n'aura donc aucune propriété particulière, notamment pas celle d'être *B*. Les novices disposent de prototypes, du moins quand la catégorie *A* est formée. Mais ils n'attachent pas, en général, de valeur plus ou moins contrexemplaire à ces prototypes. Au contraire, les experts disposent de prototypes particuliers, qu'ils peuvent utiliser. Ainsi, les matrices nilpotentes sont des générateurs de contre-exemples efficaces auxquels pensent les experts (1.a, 1.c, 1.d, 1.h) mais pas les novices. La fonction caractéristique de $\mathbf{Q}$ est un prototype contrexemplaire de fonction « très discontinue », à partir de laquelle construire des fonctions discontinues presque partout (3.a, 3.i).

Ainsi, non seulement la catégorie *A* (catégorie pivot) n'est en général pas solide chez les novices, mais les prototypes sont en outre munis d'une structure plus faible, et la distinction entre un prototype contrexemplaire et un autre type de prototype n'est pas possible.

4. Conclusion et limites

Nous avons donc retrouvé dans le cas particulier de la recherche de contre-exemples des résultats connus sur la résolution de problèmes. Mais nous avons également mis en évidence des facteurs spécifiques ou qui, dans le cas où nous nous plaçons, ont parfois plus d'importance sur la différence expert-novice que les caractéristiques déjà étudiées.

Il faut cependant noter que, quoique tout ait été entrepris, dans le cadre présent, pour limiter autant que possible l'asymétrie fondamentale entre le groupe novice et le groupe expert (les étudiants ne sont pas évalués sur les contre-exemples ; les experts et les novices répondent aux mêmes questions), les étudiants passent, de fait, au lieu et à l'heure des interrogations orales. Aussi est-il tout à fait possible que les différences observées soient dues, au moins en partie, au contrat didactique (Brousseau, 1986) qui implique une position particulière de l'apprenant face à l'enseignant. Cette limitation méthodologique pourrait être diminuée — mais sans doute pas supprimée — par une reproduction de l'expérience dans un cadre différent.

Nous n'avons pas contrôlé la difficulté des exercices utilisés, et il probable que certains sont plus faciles que d'autres. Une étude qui aurait pour but de comparer les résultats *globalement* obtenus par le groupe novice à ceux *globalement* obtenus par le groupe expert devrait nécessairement vérifier la cohérence des exercices, et les choisir de manière à satisfaire à l'exigence d'homogénéité. C'est pourquoi nous ne prétendons pas comparer *globalement* les stratégies des deux groupes, et que les comparaisons (qualitatives) se font question par question. Lorsque des différences se retrouvent sur plusieurs exercices, le fait que ces derniers soient de difficultés différentes est alors un atout et non une limitation, car il prouve que le résultat est valable *même pour des exercices de difficultés différentes.*

Nous avons cependant noté que des structures profondes se retrouvent dans les deux groupes, et que les heuristiques primitives sont les mêmes chez les sujets novices et experts.

Nous avons remarqué que des différences faisaient toutefois surface entre les deux groupes, car l'utilisation des mêmes procédures se fait différemment. En cherchant les raisons de ces différences, nous avons pu dégager les grandes lignes caractéristiques de l'expertise mathématique dans le domaine de la construction ou de la découverte de contre-exemples.

Des caractéristiques déjà étudiées dans le cas général (organisation inter-catégorielle, base de connaissance plus large), et sur lesquelles il est inutile de revenir, expliquent probablement une partie des différences observées.

Mais il semble également que les différences constatées en termes de restriction intensionnelle, de bifurcation ou d'appel de prototypes soient également responsables des dissemblances entre les deux groupes. Nous avons pu fournir des explications catégorielles aux différences concernant ces trois points, sans préjudice d'une autre explication, plus générale, utilisant la place du sujet vis-à-vis du savoir.

L'asymétrie de la situation didactique ne permet pas de déterminer avec certitude si ces distinctions sont dues à des différences de compétences ou simplement à la place des sujets dans le contrat didactique. Quoi qu'il en soit, les aspects catégoriels qui en découlent restent valables.

Cette étude a surtout été conçue comme un point de départ et une invitation à des développements. Elle est, comme annoncé plus haut, largement prospective. Les résultats obtenus devront être étayés par des expériences traitant des échantillons beaucoup plus grands, et contrôlant autant que possible les facteurs liés aux interactions non voulues entre le sujet et l'expérimentateur, perçu ici comme un enseignant.

Annexe : matériel

1. Algèbre linéaire
    a. Une matrice non diagonalisable
    b. Une matrice diagonalisable sur $\mathbf{C}$ mais non sur $\mathbf{R}$
    c. Une matrice non nulle M telle que $Sp(M) = \{0\}$
    d. Une matrice non nulle et non inversible
    e. Une matrice non inversible sans coefficient nul
    f. Deux matrices M et N telles que et $\begin{cases} MN = id \\ NM \neq id \end{cases}$
    g. Un endomorphisme d'espace vectoriel non injectif
    h. Un endomorphisme d'espace vectoriel u tel que l'on n'ait pas $\operatorname{Im}(u) \oplus \ker(u) = E$
    i. Une famille infinie libre non génératrice
    j. Un espace vectoriel non complet
2. Analyse : suites
    a. Une suite non bornée qui ne tend pas vers l'infini
    b. Une suite dont aucune sous-suite ne converge dans $\mathbf{R}$
    c. Une suite (u_n) divergente telle que pour tout entier k supérieur à 2, $(u_{kn})_n$ converge
3. Analyse : fonctions
    a. Une fonction $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ continue nulle part, sauf en 0
    b. Une fonction $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ continue partout sauf sur $\mathbf{Z}$
    c. Deux fonctions f et g telles que $\begin{cases} f \underset{0}{\sim} g \\ \neg \exp(f) \underset{0}{\sim} \exp(g) \end{cases}$
    d. Deux fonctions f et g telles que $\begin{cases} f \underset{0}{\sim} g \\ \neg \ln(f) \underset{0}{\sim} \ln(g) \end{cases}$
    e. Une fonction réelle dérivable à gauche et à droite, mais non dérivable
    f. Une fonction $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ invalidant le théorème de Rolle
    g. Une fonction $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ telle que toute suite récurrente définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ est divergente dans $\overline{\mathbf{R}}$
    h. Une suite de fonctions réelles partout discontinues de limite continue partout
    i. Une fonction $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ telle que pour tout intervalle d'intérieur non vide I, $f(I)$ n'est pas un intervalle
    j. Une fonction non bornée intégrable

4. Topologie
    a. Une intersection décroissante vide d'ouverts non vides
    b. Une suite décroissante d'ouverts d'intersection fermée
    c. Une partie infinie non dense de $\mathbf{R}$
5. Algèbre générale
    a. Une relation binaire qui ne soit ni d'ordre, ni d'équivalence
    b. Une partie *A* d'un ensemble ordonné *E* bornée sans plus grand élément
    c. Un groupe non abélien
    d. Un corps non archimédien

Références bibliographiques

Aspinwall L., Shaw K., Presmeg N. (1997). Uncontrollable mental imagery: Graphical connections between a function and its derivative. *Educational Studies in Mathematics.* Vol. 33, 301-307.

Astolfi J.-P., Develay M. (1989). *La didactique des sciences*. Paris : PUF.

Benbachir A., Zaki M. (2001a). Reconnaissance de contre-exemples en analyse, approche par questionnaire en première année universitaire. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*. Vol. 7, 117-145.

Benbachir A., Zaki M. (2001b). Production d'exemples et de contre-exemples en analyse : étude de cas en première année d'université. *Educational Studies in Mathematics.* Vol. 47, 273-295.

Balacheff N. (1978). Une étude des processus de preuve en mathématiques chez les élèves de collège. Thèse de doctorat : Institut national Polytechnique de Grenoble.

Brousseau G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques, *Recherches en didactique des mathématiques.* 7(2), 33-115.

Dominowski R. L. (1981). Comment on "An examination of the alleged role of "fixation" in the solution of several "insight" problems" by Weisberg and Alba. *Journal of Experimental Psychology: General.* 110(2), 193-198.

Durrand-Guerrier V. (1995). Place de la logique formelle comme outil d'analyse des connaissances mises en œuvre dans le raisonnement mathématique dans une perspective didactique. In G. Arsac *et al*. (éds.), *Différents types de savoirs et leur articulation*. Grenoble : La pensée Sauvage. 205-233.

Duval R. (1993). Registres de représentation sémiotiques et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives.* Vol. 5, 37-65.

Ellen P. (1982). Direction, past experience, and hints in creative problem solving: reply to Weisberg and Alba. *Journal of Experimental Psychology: General.* Vol. 111, 316-325.

Gauvrit N. (2001). La logique contextuelle. Thèse de doctorat. EHESS. Paris, France.

Glaeser G. (1987). La didactique expérimentale des mathématiques 2ème partie : La conception génétique. Université Louis Pasteur, IREM : Strasbourg, France.

Goldblatt R. (1984). Topoi, the categorial analysis of logic. North-Holland: Amsterdam.

Hart L.C. (1989). Some factors that impede or enhance performance in mathematical problem solving. *Journal for Research in Mathematics Education.* Vol. 24, 167-171.

Hasemann K. (1988). Conceptions « alternatives » des élèves, conflits conceptuels et leur importance pour les processus d'apprentissage des mathématiques. In C. Laborde (éd.), *Actes du Premier Colloque Franco-Allemand de Didactique des Mathématiques et de l'Informatique*. Grenoble : La Pensée Sauvage. 173-179.

Hiebert J. (1989). The struggle to link written symbols with understandings: An update. *Arithmetic Teacher.* Vol. 36, 38-44.

Hitt H. (1998). Système sémiotiques de représentation liés au concept de fonction. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*. Vol. 6, 7-26.

Jurdak M., Shahin I. (1999). An ethnographic study of the computational strategies of a group of young street vendors in Beirut. *Educational Studies in Mathematics.* Vol. 40, 155-172.

Jurdak M., Shahin I. (2001). Problem solving activity in the workplace and the school: the case of constructing solids. *Educational Studies in Mathematics.* Vol. 47, 297-315.

Kellogg R.T. (2003). *Cognitive Psychology.* Thousand Oaks: SAGE Publications.

Lakatos I. (1976). *Preuves et réfutations*. Paris : Hermann. (1985 pour la version française)

Lesh R. (1981). Applied mathematical problem solving. *Educational Studies in Mathematics.* Vol. 12, 235-264.

Newell A., Simon H.A. (1972) *Human problem solving*. Prentice Hall, NJ : Englewood Cliffs.

Nunes T., Schliemann, A. D., Carraher D. W. (1993). Street mathematics and school mathematics. New York : Cambridge University Press.

Pimm D. (1987). Speaking Mathematically: Communications in mathematics classrooms*.* Londres : Routledge and Kegan Paul.

Reitman W. (1964). Heuristic decision procedures, open constraints, and the structure of ill-defined problems. In M. W. Shelley & G. L. Bryan (eds.), *Human judgement and optimality.* New York, NJ : Wiley.

Resnick L. (1983). Vers une théorie cognitive de la didactique. *Actes des V^e^ Journées de Chamonix sur l'éducation scientifique*. Paris, Université Paris-VII : Didactique des disciplines.

Richard J.-F. (1990). Les activités mentales : comprendre, raisonner, trouver des solutions. Paris : Colin.

Richard J.-F. (1994). La résolution de problèmes : bilan et perspectives. *Psychologie française*. 39(2), 161-175.

Rosch E. (1973). Natural categories. *Cognitive psychology*. Vol. 4, 328-350.

Taplin M. (1995). An exploration of persevering students' management of problem solving strategies. *Focus on Learning Problem in Mathematics.* Vol. 17, 49-61.

Thom J.S., Pirie S.E.B. (2002). Problems, perseverance, and mathematical residue. *Educational Studies in Mathematics.* Vol. 50, 1-28.

Thompson D.R. (1991) Reasoning and proof in precalculus and discrete mathematics. *Annual meeting of the American Educational Research Association.* Chicago.

Vergnaud G. (1994). Le raisonnement en physique et en mathématiques. *Psychologie française*. 39(2), 153-160.

Weisberg R.W., Alba J.W. (1981). An examination of the alleged role of "fixation" in the solution of several "insight" problems. *Journal of Experimental Psychology: General.* Vol. 110, 169-192.

Wertheimer M. (1959). Productive thinking*.* New York : Harper & Row.

Wickelgren W. (1972). *How to solve problems: Elements of a theory of problem solving*. San Fransisco : Freeman and Co.

Wolf R.E. (1969). Strategies of justification used in the classroom by teachers of secondary school mathematics. University of Illinois.

L'auteur

Nicolas Gauvrit est professeur agrégé de mathématiques attaché au Département de Psychologie de l'Université de Metz. Il est également diplômé en psychologie et docteur de l'EHESS en sciences cognitives. Il a étudié la logique naturelle et ses modélisations symboliques. Depuis deux ans, il est membre de l'Équipe Transdisciplinaire Interaction et Cognition (ETIC) à l'Université de Metz où il poursuit des recherches expérimentales sur la production humaine du hasard et les catégories naturelles.